

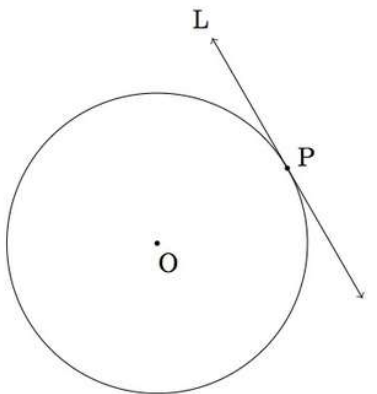
خط و دایره

به نام خدا

در این فصل مطالب مهمی درباره خط و دایره یاد می‌گیریم که در سال بعد هم به اونها احتیاج داریم. پس سعی کنید که نکات این فصل رو خوب یاد بگیرید.

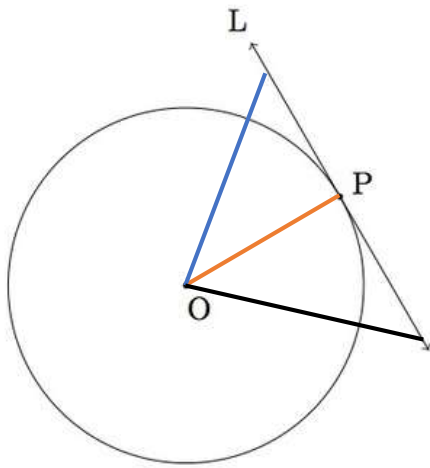
تعریف مماس دایره:

مماس دایره خطی است که فقط یک نقطه مشترک با دایره دارد.



در این شکل، خط L در نقطه P بر دایره مماسه. همینطور که می‌بینیم این خط فقط یک نقطه مشترک با دایره دارد.

مماس رو در شکل بالا در نظر بگیرید، ما می‌تونیم خطهای زیادی رو از مرکز دایره به مماس وصل کنیم:

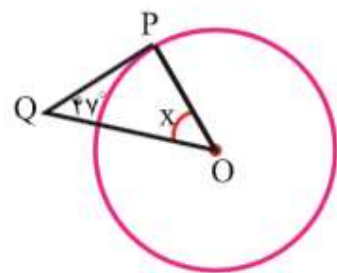
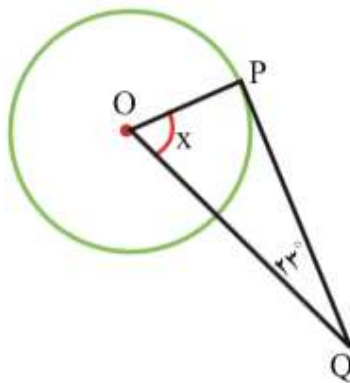
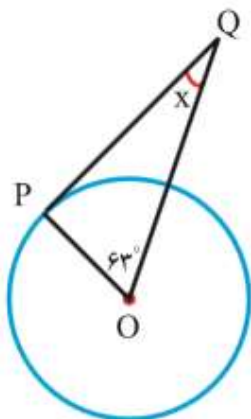


دو تا نکته مهم اینجا وجود دایره که حتما باید به ذهنمون بسپاریم:
 شعاع دایره کوتاهترین فاصله که از مرکز دایره به مماس وصل میشه و
 شعاع دایره در نقطه تماس بر خط مماس عمود است.

پس ما هر وقت که یه خط مماس بر دایره داشته باشیم، شعاع دایره که این خط رو قطع
 میکنه بر این خط عموده

مثالهای زیر از موارد استفاده این نکته هستن:

۳- در هر شکل، PQ بر دایره مماس است. اندازه زاویه خواسته شده را پیدا کنید.



در همه این شکلهای، PQ مماس بر دایره و OP شعاع دایره‌س.

طبق نکته ای که یاد گرفتیم، PQ بر OP عموده، پس در همه این شکلهای زاویه P برابر با ۹۰ درجه است.

از طرفی می‌دانیم که مجموع زاویه‌های داخلی یک مثلث برابر ۱۸۰ درجه است. بنابراین:

در سمت راست:

$$زاویه مجهول = 180 - 90 - 47 = 43$$

در شکل وسط:

$$زاویه مجهول = 180 - 90 - 23 = 67$$

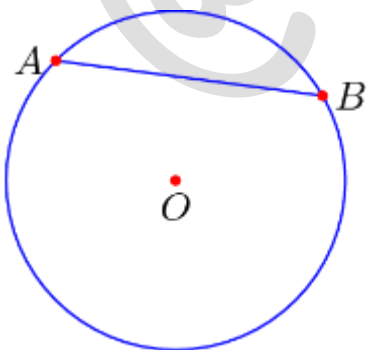
در شکل سمت راست:

$$زاویه مجهول = 180 - 90 - 63 = 27$$

آنگاه ما نکته مربوط به خط مماس رو بلد نبودیم هیچ راهی برای مناسبه اندازه این زاویه‌ها نداشتیم.

وتر دایره:

وتر قطعه داخلی دایره که در دو نقطه دایره رو قطع میکنه.



خط AB یکی از وترهای این دایره است.

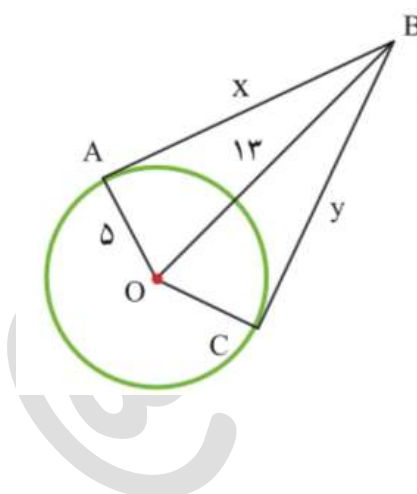
دو نکته مهمی که در اینجا وجود داره اینه که:

۱. خطی که از مرکز دایره بر وتر عمود می‌شود، وتر را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند.

۲. خطی که از مرکز دایره به وتر رسم بشود و وتر را نصف کند، بر وتر عمود است.

تمرینهای این قسمت را حل می‌کنیم تا کاربرد این نکات را بیشتر ببینیم:

حل تمرین صفحه ۱۴۱
خط و دایره



تمرین



- ۱- نقطه B در فاصله ۱۳ سانتی متری مرکز دایره‌ای به شعاع ۵ سانتی متر قرار دارد. از این نقطه دو مماس بر دایره رسم کرده‌ایم. فاصله B از هر یک از نقاط تماس را به دست آورید.

خط AB بر دایره مماس شده، از طرفی؛

مماس بر دایره، در نقطه تماس بر شعاع دایره عمود است.

بنابراین زاویه A به زاویه ۹۰ درجه و مثلث OAB قائم‌الزاویه است. پس می‌توانیم برای

به دست آوردن X از رابطه فیثاغورث استفاده کنیم:

$$x^2 + 5^2 = 13^2$$

$$x^2 + 25 = 169 \rightarrow x^2 = 169 - 25 \rightarrow x^2 = 144 \rightarrow x = 12$$

به همین ترتیب y رو هم به دست میاریم:

خط BC بر دایره مماس شده، از طرفی:

مماس بر دایره، در نقطه تماس بر شعاع دایره عموده.

بنابراین زاویه C به زاویه 90° درجه و مثلث OBC قائم‌الزاویه‌س. پس می‌تونیم برای

به دست آوردن y از رابطه فیثاغورث استفاده کنیم:

$$y^2 + 5^2 = 13^2$$

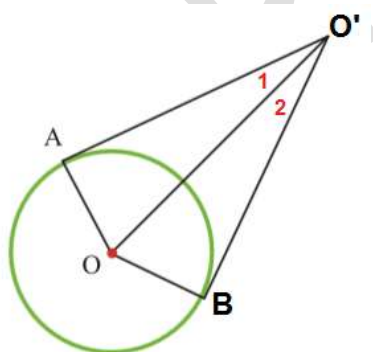
$$y^2 + 25 = 169 \rightarrow y^2 = 169 - 25 \rightarrow y^2 = 144 \rightarrow y = 12$$

۲- از نقطه O' خارج دایره‌ای به مرکز O دو مماس بر دایره رسم کنید و نقاط تماس را A و B

بنامید. شکل بکشید و دلیل هر یک از موارد زیر را بنویسید.

الف) چرا $\overline{O'A} = \overline{O'B}$ ؟

ب) چرا OO' نیمساز \hat{O} است؟



اگره همنهشتی دو مثلث OAO' و OBO' رو ثابت کنیم، می‌تونیم الف و ب رو نتیجه بگیریم:

خطهای $O'A$ و $O'B$ بر دایره مماس شدن، از طرفی خط

مماس بر دایره در نقطه تماس بر شعاع دایره عموده. پس

زاویه‌های A و B قائمه و در نتیجه این دو مثلث

قائم‌الزاویه هستن.

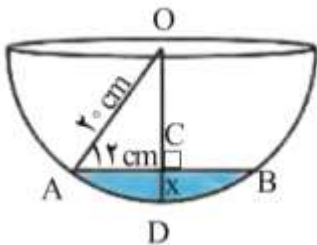
خط OO' بین هر دو مثلث مشترکه، پس وتر هر دو مثلث با هم برابره

خطهای OA و OB شعاعهای دایره هستند، پس با هم برابرند.
بنابراین دو مثلث بنا به حالت وتر و یک ضلع با هم هم‌نهشتند.

چون دو مثلث هم‌نهشتند؛ اجزای متناظر آنها هم با هم برابرند. بنابراین:

$$O'A = O'B$$

همچنین $O'_1 = O'_2$ ، پس خط OO' نیمساز زاویه O' هست.



۳- در کاسه‌کروی روبه‌رو مقداری آب ریخته‌ایم،
 \overline{AB} برابر ۲۴ سانتی‌متر شده است. حداکثر عمق آب چقدر است؟

باید مقدار x رو به دست بیاریم.

می‌دونیم که $OD = OA$ هست چون هر دو شعاع کره هستند بنابراین با هم برابرند
خب ما OD رو داریم، آگه OC رو هم به دست بیاریم، می‌تونیم از تفاضلشون x رو
ماسبه کنیم.

خط OC بر AB عمود شده، پس طبق نکته قبل AB رو به دو قسمت تقسیم میکنه،
بنابراین AC برابر ۱۲ هست. از رابطه فیثاغورث برای به دست آوردن OC استفاده
می‌کنیم:

$$20^2 = 12^2 + OC^2$$

$$OC = 16$$

با توجه به شکل داریم:

$$OD = x + OC$$

$$20 = X + 16$$

$$X = 4$$

نکته ای که درباره این سوال هست اینه که سوال اطلاعات اضافی به ما داده، یعنی نیاز نبود که مقدار AC رو به ما بده، چون می‌تونستیم با استفاده از این مطلب که " OC بر AB عموده " به راحتی بفهمیم که AC برابر ۱۲ هست.

یا اینکه نشون نمیداد که OC عمود بر AB هست و ما از اینکه AB نصف شده می‌فهمیدیم که OC بر AB عموده و می‌تونیم از خاصیت فیثاغورث که مربوط به مثلثهای قائم‌الزاویه هست استفاده کنیم.

در واقع کار ما رو خیلی راحت کرده بود 😊

آموزش گام به گام ریاضی چهارم تا دهم در سایت:

www.riazibaham.ir

و کانال‌های @RiaziBaHam و @RiaziBaHam8

برای دریافت جزوات سایر پایه‌ها، تمرینهای حل شده و نمونه سوالات

امتثانی حل شده، به "ریاضی با هم" بپیوندید.